CONCOURS DE JUIN 1974

Première Epreuve de Mathématiques

(Durée : 4 h)

a et b désignent 2 applications définies et continues sur un intervalle $]\alpha, \beta[$, et à valeurs réelles.

Soit E l'ensemble des applications $y :]\alpha, \beta[\longmapsto \mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation différentielle (e_1) définie ci-dessous :

$$(e_1) \qquad y''(x) + a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = 0 \qquad \forall x \in]\alpha, \beta[$$

1°)

a) Montrer que toute solution y admet une dérivée seconde continue sur $]\alpha, \beta[$.

b) Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications : $]\alpha, \beta[\longmapsto \mathbb{R}$

2°) Soit y_1 et y_2, deux solutions particulières de (e_1) (éventuellement $y_1 = y_2$). A chaque couple y_1, y_2 correspond l'application

$$W_{y_1, y_2} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

qui est définie sur $]\alpha, \beta[$

Déterminer l'équation différentielle linéaire du premier ordre à laquelle satisfont les fonctions W_{y_1,y_2}.

En déduire la proposition suivante :

$$\exists\, x_o \in]\alpha, \beta[\text{ tel que } W_{y_1,y_2}(x_o)=0 \iff W_{y_1,y_2}(x)=0,\ \forall x \in]\alpha, \beta[$$

3°) Dans cette question on suppose que $W_{y_1,y_2} \neq 0$

a) Vérifier que y_1 et y_2 sont linéairement indépendants.

b) Pour n = 0, 1, 2 on définit

$$H^{(n)}_{y_1,y_2,y} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y'_1 & y'_2 & y' \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}$$

où y est un élément quelconque de E. ($f^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de f, avec la convention $f^{(o)} = f$).

Montrer que l'on a

$$H^{(n)}_{y_1,y_2,y} = 0 \qquad \text{sur} \qquad]\ \alpha,\ \beta\ [$$

En déduire que

$$y^{(n)} = \lambda\ y_1^{(n)} + \mu\ y_2^{(n)} \qquad \forall\ n \in \{0,1,2\}$$

où λ et μ sont deux applications : $]\ \alpha,\ \beta\ [\longmapsto \mathbb{R}$ qui admettent des dérivées premières λ' et μ' continues.

c) Calculer λ' et μ'. En déduire que

$y = C_1\ y_1 + C_2\ y_2$ où C_1 et C_2 sont 2 constantes réelles.

Que peut-on dire de la dimension du sous-espace vectoriel E ?

4°) <u>Dans cette question on suppose que</u>

- $]\ \alpha,\ \beta\ [$ contient 0. $(\alpha < 0 < \beta)$
- a admet une dérivée première a' continue sur $]\ \alpha,\ \beta\ [$.

On considère l'équation intégrale

$$(e_2) \qquad y(x) = C + d\ x + \int_o^x K(x,t)\ y(t)\ dt$$

où C et d sont deux nombres réels

et $K(x,t) = (x-t)\left[a'(t) - b(t)\right] - a(t)$

a) Vérifier que toute solution de (e_2) est solution de (e_1).

Etudier la réciproque.

b) Soit $\{y_n\}$ une suite de fonctions : $]\ \alpha,\ \beta\ [\longmapsto \mathbb{R}$ définies comme suit :

$$y_0(x) = C + dx$$

$$y_1(x) = C + dx + \int_o^x K(x,t)\, y_o(t)\, dt$$

. . . . . .

$$y_{n+1}(x) = C + dx + \int_o^x K(x,t)\, y_n(t)\, dt$$

Montrer que la suite $\{y_n\}$ converge uniformément sur tout compact $[\alpha_1, \beta_1]$ $(\alpha<\alpha_1<\beta_1<\beta)$ vers une fonction $\hat{y}$ qui est solution de (e_2) et qui vérifie $\hat{y}(o) = C \quad \hat{y}'(o) = d - a(o)C$.

c) En déduire que E est de dimension 2.

5°) On s'intéresse à l'équation différentielle (e_3) :

(e_3) $\qquad z'' - x^2 z = 0$

Trouver 2 solutions particulières z_1 et z_2 qui sont développables en séries entières dans $]-\infty, \infty[$ et qui satisfont aux propriétés suivantes :

z_1 est une fonction paire et $z_1(o) = 1$.
z_2 est une fonction impaire et $z_2'(o) = 1$.

Justifier la propriété suivante :

$$\begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

En déduire que toute solution de (e_3) est développable en série entière dans $]-\infty, \infty[$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail